جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

مجتمع آموزش عالی گناباد

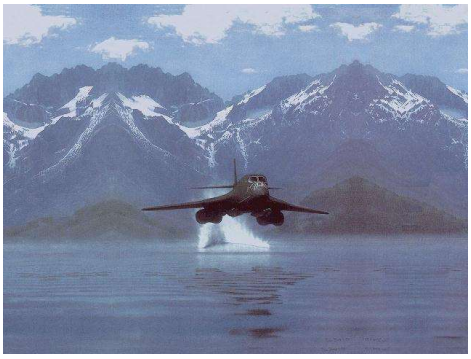
فصل پنجم

جریان تراکم پذیر

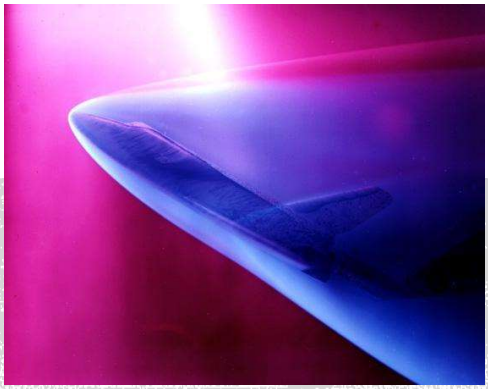
مکانیک سیالات ۲

دکتر وحید محمودی

گروه مهندسی شیمی

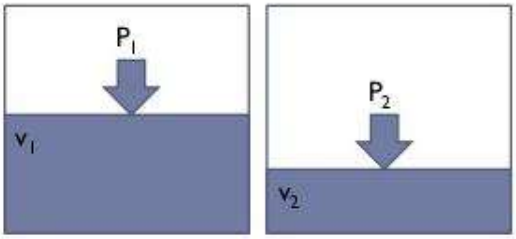


Compressible Flow

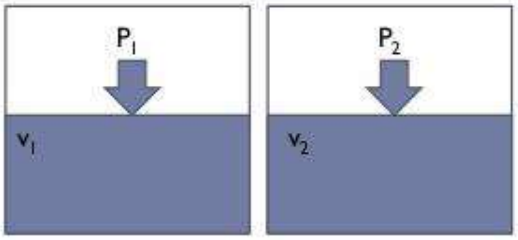


جریان تراکم پذیر و تراکم ناپذیر

- اکثر مایعات تقریبا غیر قابل تراکم هستند. به این معنی که دانسیته یک مایع با تغییر فشار تقریباً ثابت می ماند.
- بنابراین، با یک تقریب خوب می توان گفت مایعات به صورت تراکم ناپذیر جریان می یابند.
- در مقابل، گازها تراکم پذیری بالایی دارند. با این حال، شرایطی وجود دارد که در آن دانسیته جریان گاز به اندازه‌ای ثابت می‌ماند که می‌توان جریان را تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت.

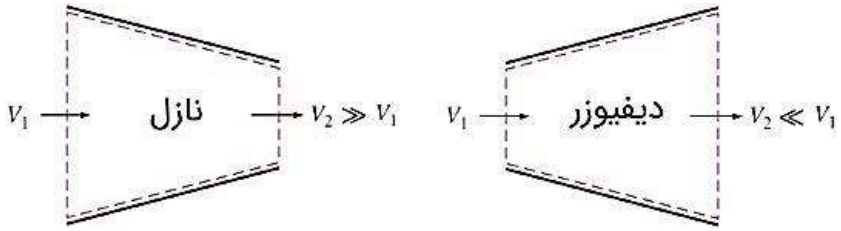


Compressible fluid

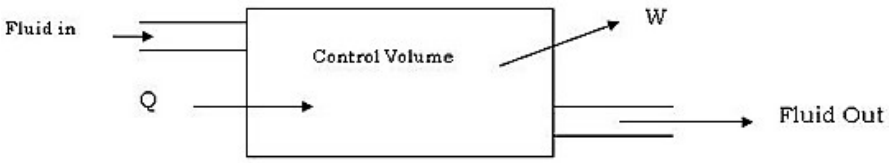


Incompressible fluid

نازل و دیفیوزر



- در نازل و دیفیوزر قوانین بقای جرم وانرژی برقرارند:



The Steady Flow Energy Equation:

$$\dot{Q} - \dot{W}_x = \sum_{out} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{in} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)$$

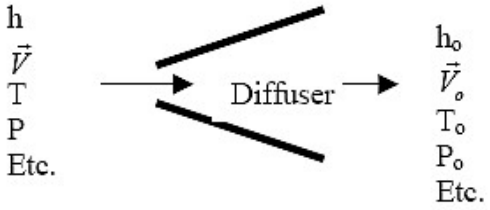
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$\Rightarrow q_{net} + h_1 + \frac{\vec{V}_1^2}{2} = w_{net} + h_2 + \frac{\vec{V}_2^2}{2}$$

https://wiki.ucl.ac.uk/display/MechEngThermodyn/First+law+applied+to+flow+processes

خواص سکون (Stagnation Properties)

- سیالی را در نظر بگیرید که با سرعت $\vec{V}$، دمای T، فشار P، و آنتالپی h و ... به داخل یک دیفیوزر جریان می یابد. به خواص سیال در این حالت، خواص استاتیک گفته می شود که برای جریانی با سرعت مشخص $\vec{V}$ اندازه گیری می شوند.



- فرض کنید دیفیوزر به اندازه کافی طولانی و ناحیه خروجی به اندازه کافی بزرگ است که سیال در خروجی دیفیوزر در حالت استراحت قرار می گیرد (سرعت صفر)، در حالی که انجام کار یا انتقال حرارت انجام نمی شود.
- به این حالت، حالت سکون (Stagnation state) و به خواص سیال در این حالت خواص سکون گفته می شود.
- اگر قانون اول ترمودینامیک را در واحد جرم برای یک ورودی و یک خروجی اعمال کرده و انرژی پتانسیل را نادیده بگیریم (حالت سکون دارای زیرنویس o می باشد):

$$q_{net} + h + \frac{\vec{V}^2}{2} = w_{net} + h_o + \frac{\vec{V}_o^2}{2}$$

خواص سکون (Stagnation Properties)

- از آن جا که سرعت خروج، مقدار کار و انتقال حرارت برابر با صفر هستند، داریم:

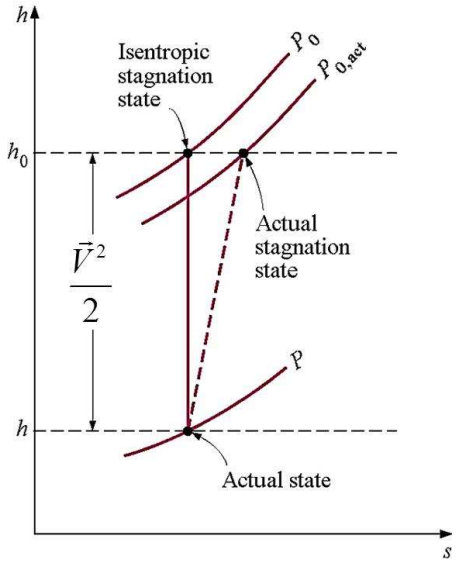
$$h_o = h + \frac{\vec{V}^2}{2}$$

- به ترم h_o انتالپی سکون (یا انتالپی کل Total enthalpy) گفته می شود. h_o انتالپی سیالی است که سرعت آن در حالت آدیاباتیک صفر شده است، در حالی که هیچ کاری هم در فرآیند رخ نمی دهد.
- در حالتی که سیستم برگشت پذیر هم باشد، فرآیند ایزونتروپیک بوده و مقادیر انتروپی ورودی و خروجی با یکدیگر برابر هستند.

$$s_o = s$$

- انتالپی و انتروپی سکون تعریف کننده حالت سکون و فشار سکون یا P_o می باشند. همان طور که در شکل بعد نشان داده شده است، فشار سکون واقعی (فرآیند برگشت ناپذیر) کمی کمتر از فشار سکون ایزونتروپیک می باشد.

خواص سکون (Stagnation Properties)



$P = 1$ MPa

T °C	$\hat{v}$ m³/kg	$\hat{u}$ kJ/kg	$\hat{h}$ kJ/kg	$\hat{s}$ kJ/kg K
sat	0.19444	2583.6	2778.1	6.5864
200	0.20596	2621.9	2827.9	6.6939
250	0.23268	2709.9	2942.6	6.9246
300	0.25794	2793.2	3051.2	7.1228
350	0.28247	2875.2	3157.7	7.3010
400	0.30659	2957.3	3263.9	7.4650
500	0.35411	3124.3	3478.4	7.7621
600	0.40109	3296.8	3697.9	8.0289
700	0.44779	3475.4	3923.1	8.2731
800	0.49432	3660.5	4154.8	8.4996
900	0.54075	3852.2	4392.9	8.7118
1000	0.58712	4050.5	4637.6	8.9119
1100	0.63345	4255.1	4888.5	9.1016
1200	0.67977	4465.6	5145.4	9.2821
1300	0.72608	4681.3	5407.4	9.4542

- **مثال ۵-۱:**

بخار آب در دمای ۴۰۰ °C، فشار ۱ Mpa و سرعت ۳۰۰ m/s در درون یک لوله جریان دارد. مطلوبست تعیین خصوصیات بخار در حالت سکون (P_o, T_o, ρ_o).

حل: در دمای ۴۰۰ °C، فشار ۱ Mpa، از جداول بخار فوق اشباع داریم:

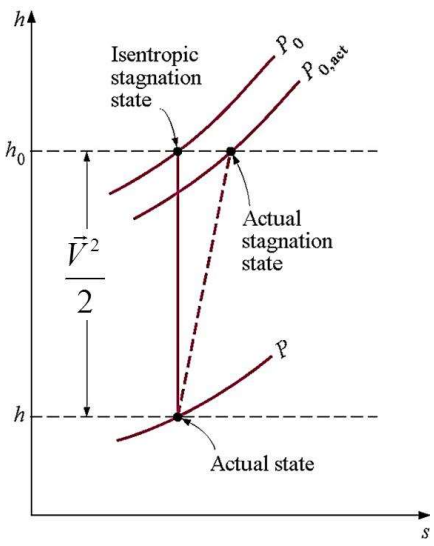
خواص سکون (Stagnation Properties)

- **در نتیجه**

$$h_o = h + \frac{\vec{V}^2}{2}$$

$$s_o = s = 7.465 \frac{kJ}{kg \cdot K}$$

$$h_o = h(P_o, s_o) \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$$



خواص سکون (Stagnation Properties)

- خواص سکون به دست آمده عبارتند از

$$P_o = 1.16\,MPa$$

$$T_o = 422.2^o C$$

$$\rho_o = \frac{1}{v_o} = 3.640\,\frac{kg}{m^3}$$

- **خواص سکون برای یک گاز ایده آل**

با نوشتن معادله انتالپی سکون داریم:

$$h_o - h = \frac{\vec{V}^2}{2}$$

برای یک گاز ایده آل با ظرفیت گرمایی ویژه ثابت می توان نوشت:

$$C_P(T_o - T) = \frac{\vec{V}^2}{2}$$

خواص سکون برای گاز ایده آل

- در نتیجه برای دمای سکون داریم:

$$T_o - T = \frac{\vec{V}^2}{2C_P}$$

- همچنین در یک فرآیند ایزونترویک برای یک گاز ایده آل می توان به کمک روابط زیر فشار سکون را نیز تعیین کرد:

$$\frac{T_o}{T} = \left(\frac{P_o}{P}\right)^{(k-1)/k}$$

یا

$$\frac{P_o}{P} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{k/(k-1)}$$

خواص سکون برای گاز ایده آل

- مثال ۵-۲:

یک هواپیما در ارتفاع ۵۰۰۰ m و با سرعت ۲۵۰ m/s پرواز می کند. در این ارتفاع، دمای هوا برابر با ۲۵۵/۷ K و فشار برابر با ۵۴/۰۵ kPa می باشد. مطلوبست تعیین مقادیر T_o و P_o.

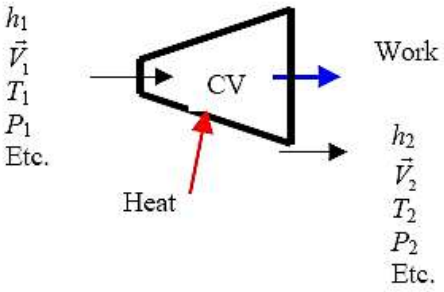
حل:

$$T_o = T + \frac{\vec{V}^2}{2C_P}$$

$$P_o = P\left(\frac{T_o}{T}\right)^{k/(k-1)}$$

کاربرد خواص سکون

- **نوشتن معادله انرژی برای یک سیال به کمک خواص سکون**



معادله انرژی حالت پایا برای سیستم بالا به شکل زیر می باشد:

$$\dot{Q}_{net} + \sum_{inlets} \dot{m}_i \left(h + \frac{\vec{V}^2}{2} + gz\right)_i = \dot{W}_{net} + \sum_{outlets} \dot{m}_e \left(h + \frac{\vec{V}^2}{2} + gz\right)_e$$

از آن جا که داریم:

$$h_o = h + \frac{\vec{V}^2}{2}$$

پس می توان نوشت

$$\dot{Q}_{net} + \sum_{inlets} \dot{m}_i \left(h_o + gz\right)_i = \dot{W}_{net} + \sum_{outlets} \dot{m}_e \left(h_o + gz\right)_e$$

کاربرد خواص سکون

برای یک جریان ورودی و یک جریان خروجی و عدم انتقال حرارت داریم:

$$\dot{W}_{net} = \dot{m}\left((h_{o1} - h_{o2}) + g(z_1 - z_2)\right)$$

اگر از تغییرات انرژی پتانسیل صرفنظر شود:

$$\dot{W}_{net} = \dot{m}\left(h_{o1} - h_{o2}\right)$$

و برای گاز ایده آل با مقادیر c_p ثابت، رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$\dot{W}_{net} = \dot{m}C_P\left(T_{o1} - T_{o2}\right)$$

- **نوشتن معادله انرژی برای یک نازل**

فرآیند را به صورت جریان پایا، بدون انتقال حرارت و کار، و یک ورودی و یک خروجی فرض گرفته و تغییرات ارتفاع را نادیده می گیریم.

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{Q}_{net} + \sum_{inlets} \dot{m}_i\left(h_o + gz\right)_i = \dot{W}_{net} + \sum_{outlets} \dot{m}_e\left(h_o + gz\right)_e$$

$$\Rightarrow \dot{m}_1 h_{o1} = \dot{m}_2 h_{o2}$$

معادله انرژی برای یک نازل

با توجه به شرایط پایا داریم:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow h_{o1} = h_{o2}$$

بنابراین انتالپی سکون در سرتاسر نازل ثابت می ماند. در هر مقطعی از نازل، مقدار انتالپی سکون مانند جریان ورودی است.

و برای عبور گاز ایده آل با مقادیر c_p ثابت از یک نازل می توان گفت:

$$T_{o1} = T_{o2}$$

در این حالت، دمای سکون در سرتاسر نازل ثابت می ماند. در هر مقطعی از نازل، مقدار دمای سکون مانند جریان ورودی است.

می دانیم با فرض فرآیند ایزنتروپیک برای جریان از طریق نازل، می توان برای حالت های ورودی و خروجی نوشت:

نتیجه؟؟؟

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \left(\frac{T_{o2}}{T_{o1}}\right)^{k/(k-1)}$$

- فشار سکون نیز برای گاز ایده آل در سرتاسر نازل برای یک فرآیند ایزنتروپیک ثابت است.

سرعت صوت و عدد ماخ

در این بخش می خواهیم نشان دهیم که مقدار عدد بدون بُعد ماخ **M** در یک جریان را می توان به خواص سکون ربط داد.

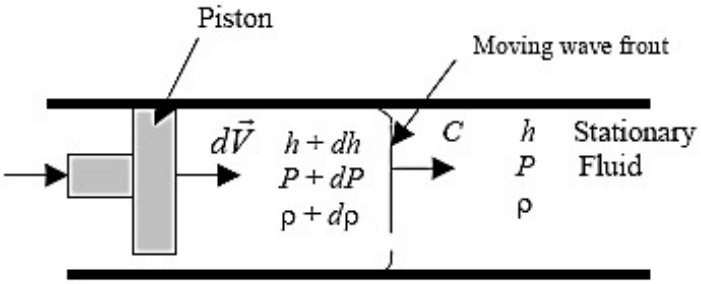
- تعریف عدد ماخ

$$M = \frac{\vec{V}}{C}$$

که در این رابطه، C مقدار سرعت صوت در سیال می باشد. اما ابتدا باید سرعت صوت در سیال را تعریف کنیم:

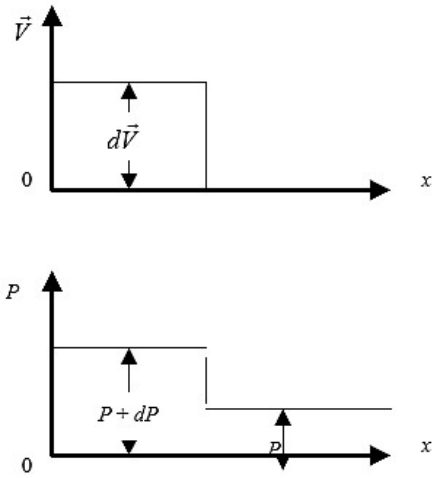
یک اغتشاش فشاری در درون یک سیال تراکم پذیر با سرعتی وابسته به وضعیت سیال منتشر می شود. سرعت حرکت این موج فشاری در سیال را سرعت صوت می نامند.

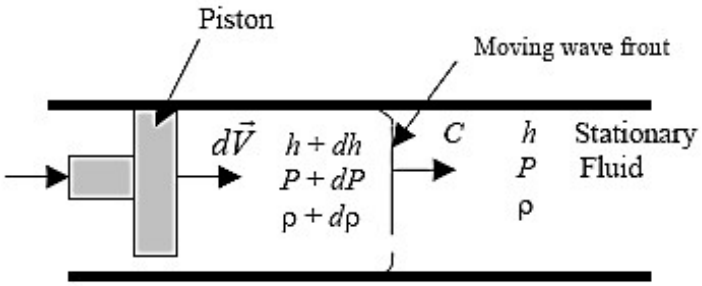
- مطابق با شکل، یک موج فشاری کوچک ناشی از جابجایی کوچک یک پیستون در یک لوله پر از گاز ایده آل را در نظر بگیرید:



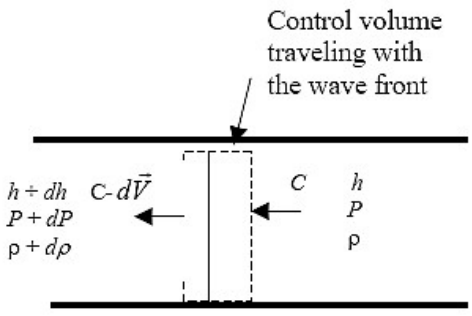
سرعت صوت و عدد ماخ

- وضعیت سیستم را به کمک نمودارهای زیر می توان نشان داد:





- برای مطالعه این موج فشاری، یک حجم کنترل در نظر می گیریم:



سرعت صوت و عدد ماخ

- با نوشتن معادله انرژی برای جریان پایا، بدون انتقال حرارت و کار و صرفنظر از تغییرات انرژی پتانسیل داریم:

$$h+\frac{C^2}{2}=(h+dh)+\frac{(C-d\vec{V})^2}{2}$$

$$h+\frac{C^2}{2}=(h+dh)+\frac{(C^2-2Cd\vec{V}+d\vec{V}^2)}{2}$$

با ساده سازی معادله و صرفنظر از dV^2 داریم:

$$dh-Cd\vec{V}=0$$

همچنین با نوشتن معادله پیوستگی برای حجم کنترل:

$$\rho AC=(\rho+d\rho)\,A(C-d\vec{V})$$

$$\rho AC=A(\rho C-\rho d\vec{V}+Cd\rho-d\rho d\vec{V})$$

با ساده سازی معادله و صرفنظر از $d\rho dV$ داریم:

$$C\,d\rho=\rho\,d\vec{V}$$

سرعت صوت و عدد ماخ

- روابط ترمودینامیکی زیر را نیز می دانیم:

$$dh=T\,ds+v\,dP \qquad or \qquad dh=T\,ds+\frac{1}{\rho}dP$$

با فرض انجام فرآیند به صورت ایزونتروپیک ($dS=0$):

$$dh=\frac{1}{\rho}dP$$

با استفاده از نتایج قانون اول داریم:

$$dh=\frac{1}{\rho}dP=C\,d\vec{V}\Rightarrow\frac{1}{C}dP=\rho d\vec{V}$$

و همچنین از معادله پیوستگی

$$\rho d\vec{V}=C\,d\rho=\frac{1}{C}dP$$

در نهایت

$$\frac{dP}{d\rho}=C^2$$

سرعت صوت و عدد ماخ

- چون فرآیند به صورت ایزونتروپیک در نظر گرفته شده است:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = C^2 \qquad (1)$$

از طرفی برای فرآیند ایزونتروپیک می دانیم:

$$PV^k = cte \quad (k = \frac{c_p}{c_v}) \Rightarrow -k \ln V = \ln P + cte \Rightarrow -k\frac{dV}{V} = \frac{dP}{P} \quad or \quad k\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\rho} = k\frac{P}{\rho} \qquad (2)$$

که در این رابطه، k همان نسبت ظرفیت های گرمایی ویژه در فشار و حجم ثابت می باشد.

برای گاز ایده آل می توان نوشت:

$$P = \rho RT \Rightarrow \frac{P}{\rho} = RT \qquad (3)$$

سرعت صوت و عدد ماخ

- پس برای گاز ایده آل با ترکیب روابط (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$Combination\ of\ (1),(2),(3) \Rightarrow \begin{array}{l} C^2 = kRT \\ C = \sqrt{kRT} \end{array}$$

- مثال ۵-۳: سرعت صوت در هوا را در ارتفاع ۵۰۰۰ m از سطح دریا تعیین کنید. در این ارتفاع، دمای هوا برابر با ۲۵۵/۷ K می باشد.

حل:

$$C = \sqrt{kRT}$$

سرعت صوت و عدد ماخ

- **مثال ۵-۴: سرعت صوت را در بخار با دمای ۳۵۰ °C و فشار ۱ Mpa تعیین کنید.**

حل: در این شرایط دمایی و فشاری

$$C = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial\left(\frac{1}{v}\right)}\right)_s}$$

در اینجا، مقدار مشتق جزئی را با تغییر فشار به میزان ±0.025 از ۱ مگاپاسکال تقریب می‌زنیم. مقدار انتروپی برابر با $s = 7.301\ \mathrm{kJ/kg{\cdot}K}$ می باشد. برای حل باید از جداول بخار استفاده شود:

$$C = \sqrt{\frac{(1025-975)kPa}{\left(\frac{1}{0.2773}-\frac{1}{0.2882}\right)\frac{kg}{m^3}}\frac{1000\frac{m^2}{s^2}}{\frac{kJ}{kg}}\frac{kJ}{m^3 kPa}}$$

$$= 605.5\frac{m}{s}$$

$P = 1$ MPa

T °C	$\hat{v}$ m³/kg	$\hat{u}$ kJ/kg	$\hat{h}$ kJ/kg	$\hat{s}$ kJ/kg K
sat	0.19444	2583.6	2778.1	6.5864
200	0.20596	2621.9	2827.9	6.6939
250	0.23268	2709.9	2942.6	6.9246
300	0.25794	2793.2	3051.2	7.1228
350	0.28247	2875.2	3157.7	7.3010

سرعت صوت و عدد ماخ

- **سوال: در صورتی که این بخار را گاز ایده آل در نظر می گرفتیم، سرعت صوت چه مقدار به دست می آمد؟ ($k = 1.3$)**

سرعت صوت و عدد ماخ

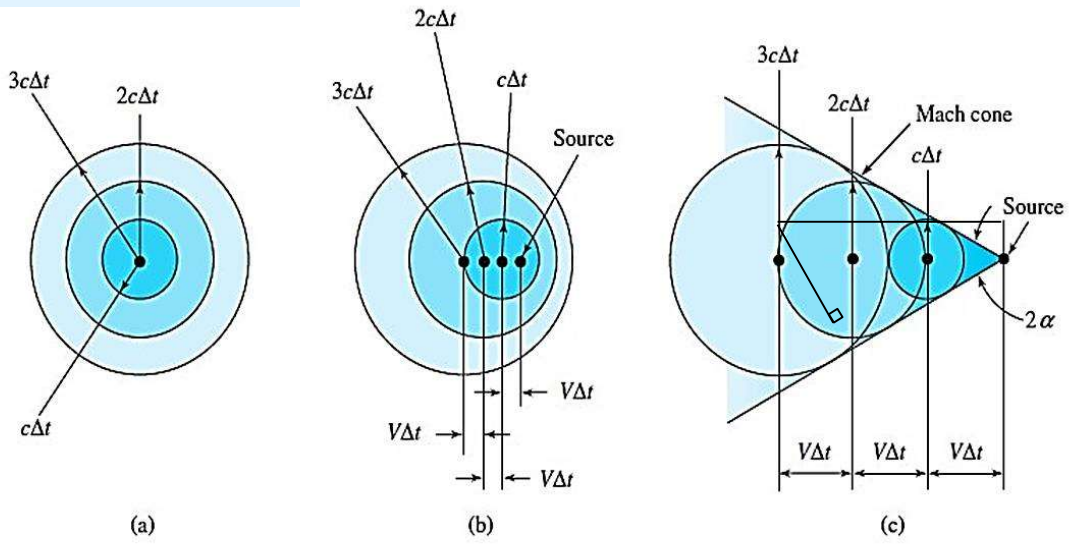
$$M = \frac{\vec{V}}{C}$$

	Flow Regime	Density Gradient	Shock Waves
$M \le 0.3$	Incompressible	Negligible	None
$0.3 < M \le 0.8$	Subsonic	Small	None
$0.8 < M \le 1.2$	Transonic	Significant	First appear
$1.2 < M \le 3.0$	Supersonic	Significant	Significant
$3.0 < M$	Hypersonic	Dominant	Dominant

مخروط ماخ

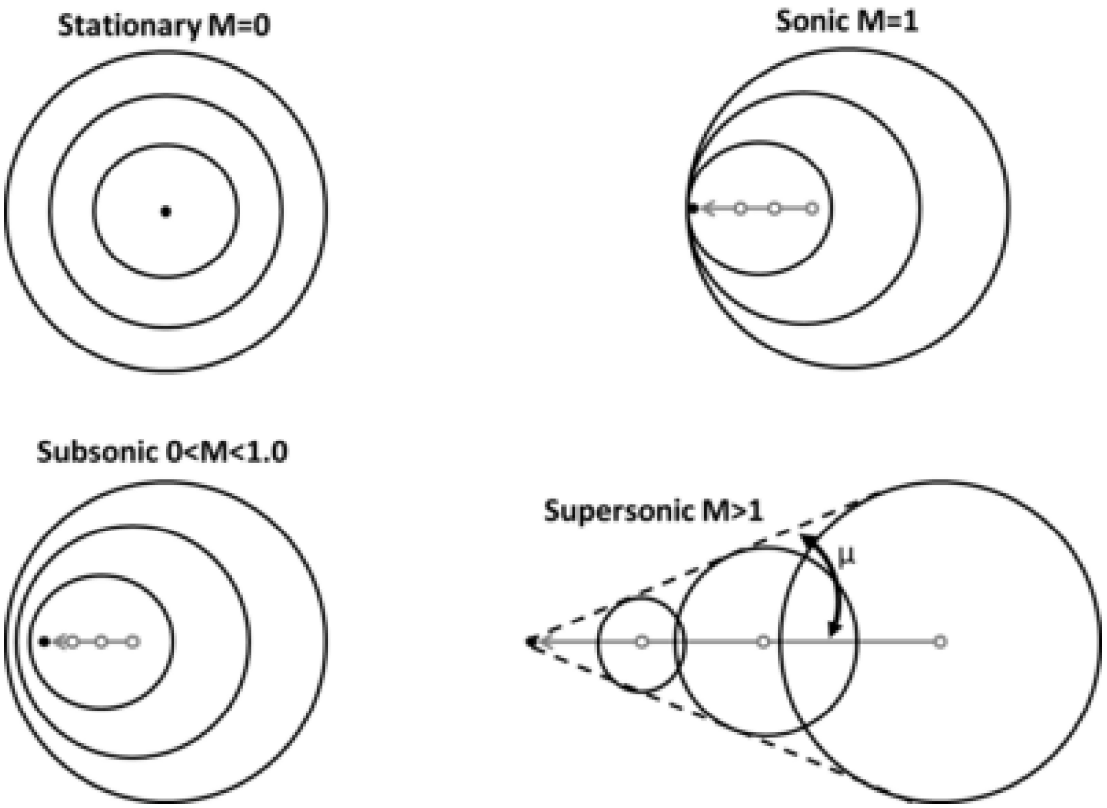
- برای حالتی که $M < 1$ باشد، جریان مادون صوت و برای حالتی که $M > 1$ باشد، جریان فراصوت نامیده می شود.
- زاویه α برای یک مخروط ماخ به شکل مقابل تعیین می شود:

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{c}{V} = \sin^{-1}\frac{1}{M}$$

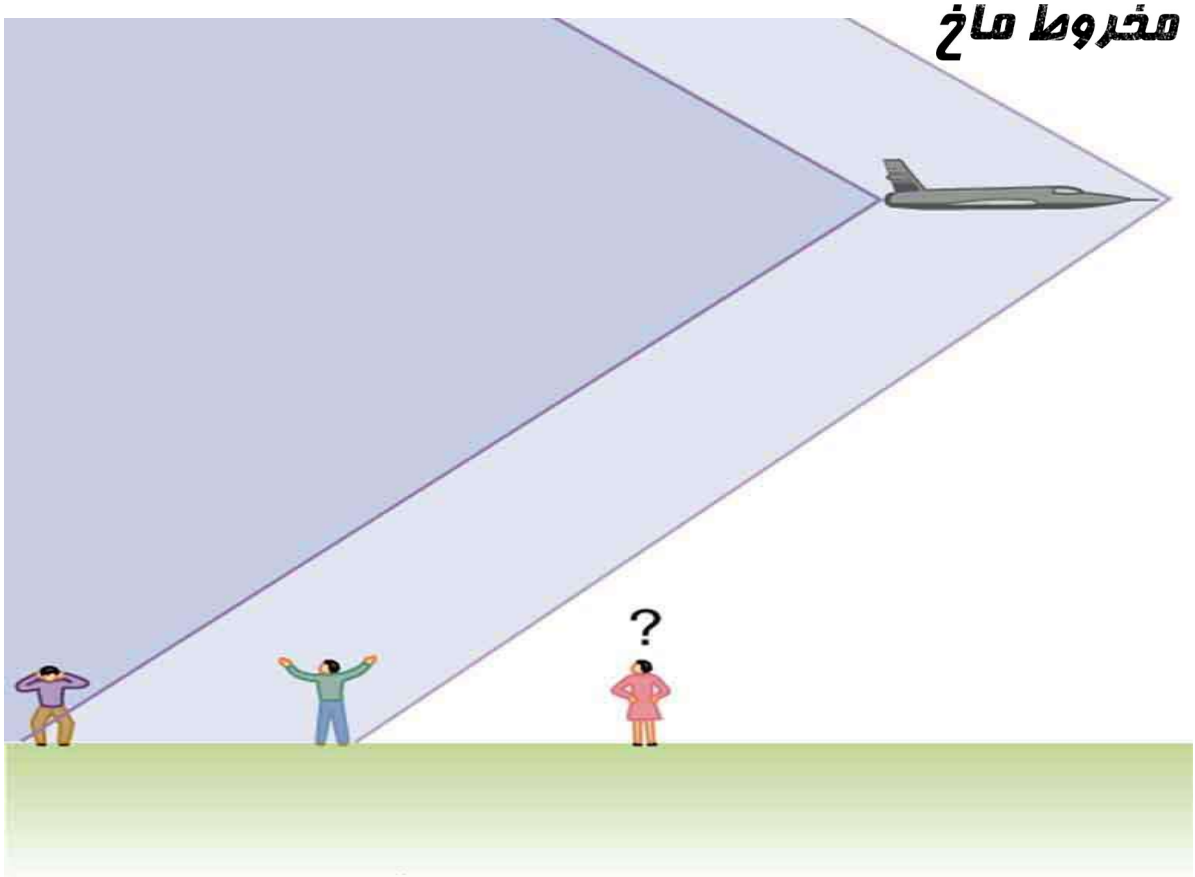


Sound waves propagating from a noise source: (a) stationary source; (b) moving source, $V < c$; (c) moving source, $V > c$.

مخروط ماخ



مخروط ماخ



مخروط ماخ

- **مثال ۵-۵: برای مثال های قبل (هوا و بخار آب)، در صورتی که سرعت هوا و بخار آب به ترتیب برابر با ۲۵۰ m/s و ۳۰۰ m/s باشد، عدد ماخ را تعیین نمایید.**

حل:

- ***روابط عدد ماخ و پارامترهای جریان***

پارامترهای جریان $T_0/T, P_0/P, \rho_0/\rho$ و ... به عدد ماخ جریان مربوط می باشند.

با در نظر گرفتن گاز ایده آل داریم:

$$T_o = T + \frac{\vec{V}^2}{2C_P}$$

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{\vec{V}^2}{2C_P T}$$

روابط عدد ماخ و پارامترهای جریان

می دانیم

$$C_P = \frac{k}{k-1}R \quad or \quad \frac{1}{C_P} = \frac{k-1}{kR}$$

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{\vec{V}^2}{2T}\frac{(k-1)}{kR}$$

و

$$C^2 = kRT$$

در نتیجه

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2}\frac{\vec{V}^2}{C^2} = 1 + \frac{(k-1)}{2}M^2$$

نسبت فشارها هم به شکل زیر داده می شود:

$$\frac{P_o}{P} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{k/(k-1)} = \left(1 + \frac{(k-1)}{2}M^2\right)^{k/(k-1)}$$

روابط عدد ماخ و پارامترهای جریان

می توان نشان داد که نسبت دانسیته ها نیز به شکل زیر است:

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{1/(k-1)} = \left(1 + \frac{(k-1)}{2} M^2\right)^{1/(k-1)}$$

می توان جداول جریان ایزونتروپیک را برای مقادیر معکوس این پارامترها (P/P_0, T/T_0, ρ/ρ_o) مشاهده کرد (*k=1.4*).

برای عدد ماخ برابر با ۱ (جریان سونیک یا صوتی)، خواص استاتیک با علامت "*" نشان داده می شوند. این حالت، زمانی که $M = 1$ باشد، شرایط صوتی نامیده می شود. برای $M = 1$ و $k = 1.4$، نسبت خواص استاتیک به خواص سکون به شکل زیر است:

$$\frac{T^*}{T_o} = \frac{2}{k+1} = 0.83333$$

$$\frac{P^*}{P_o} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 0.52828$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_o} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} = 0.63394$$

Isentropic Flow Tables

$\gamma = 1.4$

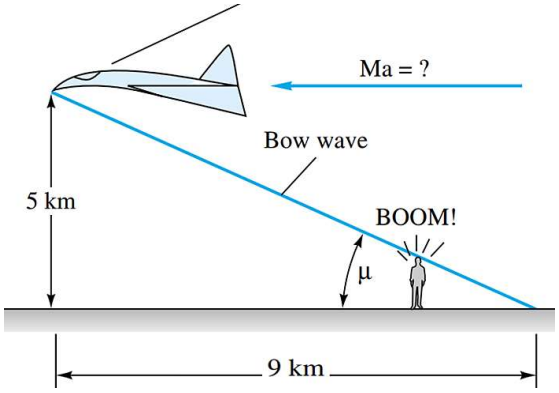
M	P/P_0	T/T_0
1.00	0.5283	0.8333

http://www.cchem.berkeley.edu/cbe150a/isentropic_flow.pdf

مخروط ماخ

- مثال ۵-۶: مطابق با شکل، یک ناظر روی زمین صدای ناشی از حرکت هواپیما در ارتفاع ۵ کیلومتری را نمی شنود، تا زمانی که هواپیما ۹ کیلومتراز او دور شده باشد. عدد ماخ هواپیما چقدر است؟

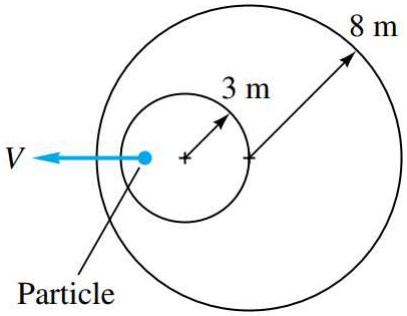
حل؟؟؟



مخروط ماخ

- مثال ۵-۷: ذره‌ای که با سرعت یکنواخت در هوای استاندارد سطح دریا (۱ اتمسفر، ۱۵ درجه سانتیگراد) حرکت می‌کند، دو موج صوتی را مطابق شکل زیر ایجاد می‌کند. مطلوبست محاسبه سرعت ذره و عدد ماخ.

حل؟؟؟



Any Question?